ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«ДИНАМИКА ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В ХАОТИЧЕСКОМ ОКРУЖЕНИИ: СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА»

Выполнила студентка
243М группы
Арефьева Наталия Сергеевна

____

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук
Сатунин Петр Сергеевич

____

Научный консультант:
кандидат физ.-мат. наук
Поляков Евгений Александрович

____

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____________

МОСКВА

2023

Содержание

1 Введение

Хаотическое поведение играет существенную роль в различных областях науки (например, лежит в основе классической термодинамики и гидродинамики). В классических системах хаос характеризуется экспоненциальной чувствительностью эволюции системы во времени к начальным условиям, однако в квантовой механике охарактеризовать хаос таким же образом не представляется возможным, поскольку понятие траекторий фазового пространства теряет свое значение из-за принципа неопределенности Гейзенберга. Существуют разные подходы для определения квантового хаоса: через статистику энергетических уровней [5, 6]; спектральные форм-факторы [6]; эхо Лошмидта [14]; аномально упорядоченные временные корреляторы (*out-of-time ordered correlators*, сокращенно OTOC) [15–17]; в контексте квантового моделирования через распад фиделити [13] и другие. Однако истинное понимание природы квантового хаоса и пределов использования различных его диагностик, а также возможной связи между ними является предметом текущих исследований, как теоретических, так и экспериментальных.

Интерес к квантовому хаосу вызван его широким применением в объяснении фундаментальных проблем, таких как: механизм термализации в изолированным системах, для которого существенную роль играют собственные состояния квантовых хаотических систем [7, 18, 19]; скремблирование информации [16]; по отношению к открытым квантовым системам влияние хаоса на процессы декогеренции и диссипации [21–26] и т.д. В настоящее время существуют различные экспериментальные реализации хаотического поведения, например, в спиновых цепочках [27] на холодных атомах или в виде цепочек на поверхности [20]. Тем не менее многие фундаментальные вопросы квантового хаоса остаются открытыми.

В работе Берри [21] высказана точка зрения, что для возникновения квантового хаоса необходимо окружение. Таким образом, квантовая декогеренция, возникающая в неизолированных системах, справляется с квантовым подавлением хаоса (связанным с тем, что квантовые системы имеют дискретные, квантованные уровни энергии, которые управляют эволюцией динамических величин, следовательно, эта эволюция не может быть хаотической).

Благодаря окружению можно попытаться ввести понятие квантовых траекторий открытой квантовой системы (ОКС) как записи истории ее движения. Квантовая траектория образуется за счет декогеренции со средой. Данное определение траектории связано с концепцией декогерентных историй [30].

В данном контексте можно выделить две смежные задачи:

1. Описание квантового хаоса с помощью понятия квантовых траекторий в хаотической ОКС, помещенной в квантовое окружение, которое служит измерителем ОКС.

2.Возникновение необратимой декогерентной истории в окружении, которое само является хаотической системой конечного объема.

Целью работы являлось решение этих задач.

В настоящей работе предлагается возможный критерий хаоса, основанный на понятии квантовой траектории. Рассматривается хорошо изученная система квантового волчка с толчками [28]. Данная система в классическом пределе демонстрирует переход от интегрируемого режима к хаотическому в зависимости от величины параметра, стоящего перед силой вынужденных толчков. Тем самым модель хорошо подходит для изучения новых сигнатур квантового хаоса. Открытый квантовый волчок с толчками подключается к окружению и затем микроскопически строятся моды окружения, содержащие в себе информацию об ОКС. Зная эти степени свободы, можно измерить их одну за другой, а последовательность результатов измерения будет представлять квантовую траекторию. Разумно предположить, что энтропия ансамбля таких квантовых траекторий будет радикально различаться в интегрируемом и хаотическом режимах, что и было доказано в данной работе.

Также в данной работе рассматривались бильярдные системы [2–4] в роли квантового окружения конечного объема. Динамика бильярда определяется формой его границы и может быть интегрируемой, хаотической или смешанного типа. Для понимания как в хаотическом окружении конечного объема возникают декогерентные истории, необходимо знать, как происходит процесс диссипации в такой системе. Исследование простейшего Марковского режима диссипации было проведено в ходе данной работы.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дается описание понятия хаоса в классическом и в квантовом случаях. В разделе 3 развивается метод построения квантовых траекторий для модели открытого квантового волчка с толчками и считается энтропия ансамбля таких траекторий. Раздел 4 рассматривает квантовую бильярдную систему [2] как хаотическое окружение. Раздел 5 является заключительным.

2 Хаотические квантовые системы

Квантовый хаос представляет собой динамические квантовые системы, являющиеся хаотическими в классическом пределе. В силу принципа соответствия свойства системы, приводящие к хаотической динамике на классическом уровне, должны также присутствовать в основной квантовой системе. Эти особенности системы становятся заметными в квазиклассическом пределе квантовой системы ($\hbar \to 0$) [1,2].

Существует множество примеров хаотических систем, а также систем, демонстрирующих разную динамику в зависимости от своих параметров. Наиболее известными в силу несложной формулировки и интересных физических явлений являются системы: ротатора с толчками (демонстрирует динамическую локализацию) и волчка с толчками [6,28]. Два важных класса для изучения классических хаотических систем: отображения, сохраняющие площадь (стандартное отображение Чиркова) [1,2]; хаотические бильярды [2–4].

2.1 Классический хаос

В классической механике существует класс систем, динамика которых является интегрируемой. Классическая система с гамильтонианом $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_N)$ и $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_N)$ канонические координаты, называется интегрируемой, если она имеет столько же функционально независимых сохраняющихся величин $\mathbf{I} = (I_1, I_2, ..., I_N)$ в инволюции сколько степеней свободы (N):

$$\{I_k, H\} = 0\,, \{I_k, I_j\} = 0\,, \quad \text{где } : \{f, g\} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

Фазовые пространства таких систем покрываются N-мерными инвариантными торами и динамика может быть представлена в переменных угол-действие как повороты таких торов. Такое движение считается происходящим на N-мерном торе.

Более общей для динамических систем является хаотическая динамика. Общепринятого строгого определения хаоса не существует. Обычно классическая динамическая система считается хаотической, если она обладает экспоненциальной чувствительностью траекторий фазового пространства к небольшим возмущениям (локальной нестабильности, малая неопределенность начальных условий быстро растет со временем) [5], данное условие является необходимым и иногда достаточным. Наиболее часто встречающимся математическим определением хаоса является определение, сформулированное для непрерывного отображения, которое называется хаотическим, если удовлетворяет трем условиям: отображение транзитивно, имеет чувствительность к начальным условиям, его периодические точки образуют плотное подмножество [10]. Малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному расхождению траекторий в фазовом пространстве:

$$\|\delta x_t\| \approx e^{\Lambda t}\|\delta x_0\|$$

$\|\delta x_0\|$ — расстояние между начальными условиями в фазовом пространстве, $\|\delta x_t\|$ — расстояние между траекториями в фазовом пространстве с течением времени t по отношению к норме $\|\cdot\|$, Λ — максимальная экспонента Ляпунова, определяющая скорость расхождения траекторий. Динамика соответствует хаосу, если максимальная экспонента Ляпунова положительна.

Есть и другие способы, которыми можно охарактеризовать динамические хаотические системы, например, с помощью энтропии Колмогорова-Синая, которая также является положительной для хаотических систем [2,4].

2.2 Критерии квантового хаоса

В квантовом случае нельзя описать хаос таким же образом. Во-первых, в силу принципа неопределенности невозможно сделать бесконечно малые сдвиги траекторий в фазовом пространстве и напрямую определить экспоненту Ляпунова, а также из-за линейности уравнений квантовой механики. В силу унитарности временной эволюции состояний два близлежащих состояния (т. е. состояния с большим начальным перекрытием) будут оставаться близлежащими с течением времени, а их перекрытие будет постоянным во времени.

Тем не менее существуют разные подходы для определения квантового хаоса, выделяющие характерные особенности хаотических квантовых систем. Одним из основных методов является изучение статистических свойств энергетических уровней системы [5, 6]. Данный подход связан с теорией случайных матриц: статистика уровней квантовых систем, имеющих классически хаотический аналог, эквивалентна статистике случайных матриц с гауссовым распределением элементов. Данное утверждение известно как гипотеза Боигаса-Джанонни-Шмидта, которая была проверена и подтверждена многочисленными экспериментами и численными моделированиями [5]. В зависимости от свойств симметрий гамильтониана (наиболее важными из которых являются наличие спина и обращения времени) спектральная статистика эквивалентна статистике случайных матриц с гауссовым распределением элементов. Распределение межуровневых интервалов (интервалов между двумя ближайшими уровнями энергии) гамильтониана с определенными свойствами симметрии (например, для систем с симметрией обращения во времени гамильтониан — действительный оператор, т.е. $H_{i,j} = H_{j,i}$) будет иметь такое же распределение как у случайных матриц из Гауссовского ортогонального ансамбля (свойство симметрии гамильтониана сохраняется при ортогональных преобразованиях). Распределение межуровневых интервалов хаотической квантовой системы с таким гамильтонианом аппроксимируются распределением Вигнера-Дайсона для Гауссовского ортогонального ансамбля:

$$P_{chaos}(\omega) = \frac{\pi}{2}\omega \exp(-\frac{\pi}{4}\omega^2)\,, \quad \text{где} \quad \omega = (E_{n+1} - E_n)/\langle\omega\rangle$$

где $\{E_n\}$ — упорядоченная последовательность собственных энергий гамильтониана, $\langle\omega\rangle$ — среднее межуровневое расстояние.

Для интегрируемых систем распределение межуровневых интервалов является Пуассоновским (гипотеза Берри-Табора):

$$P_{int}(\omega) = e^{-\omega}$$

Примерами систем, демонстрирующих статистику Вигнера-Дайсона, являются тяжелые ядра, бильярд Синая, Бунимовича, высоко возбужденные уровни атома водорода в сильном магнитном поле, спиновые системы и другие [7]. На сегодняшний день известны необщие контрпримеры, такие как арифметический бильярд, нарушающие гипотезу Боигаса-Джанонни-Шмидта [29].

Квантовый хаос можно также определить, используя аномально упорядоченный временной коррелятор, которому уделяется особое внимание в последнее время [15–17]. Он естественным образом обобщает определение классической Ляпуновской экспоненты на квантовый случай. OTOC отражает экспоненциальную расходимость траекторий в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$:

$$Cor_{ij}(t) = \langle [\hat{q}_i(t), \hat{p}_j(0)]^2 \rangle \approx \hbar^2 \{q_i(t), p_j(0)\}^2 = \hbar^2 \left| \frac{\partial q_i(t)}{\partial q_j(0)} \right|^2 \approx \hbar^2 \frac{\| \delta \mathbf{z}(t) \| \}^2}{\| \delta \mathbf{z}(0) \| \}^2} \approx \hbar^2 e^{2\Lambda t}$$

где p_i и q_i, $i = 1, \ldots, N$, $\mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — классические канонические переменные, переходящие в операторы $\hat{p}_i$ и $\hat{q}_i$ после квантования. Такой экспоненциальный рост носит временный характер и зависит от начального волнового пакета (начальных условий). Однако существуют системы, например, бильярды, для которых нельзя отличить хаотическое поведение от интегрируемого с помощью OTOC [17].

До сих пор не удалось представить универсальный критерий определения квантового хаоса и строго понять это явление. Те или иные способы диагностики квантового хаоса имеют свои недостатки. Тем самым, мотивирован интерес в нахождении универсальных критериев квантового хаоса для классически хаотических систем, а также понимание природы появления данного явления.

3 Квантовый хаос и декогерентные истории

Квантовая механика объединяет в себе детерминированное уравнение Шредингера со стохастической вероятностной природой волновой функции. В силу дискретности спектра гамильтониана и неопределенности Гейзенбегра происходит квантовое подавление хаоса. Тем самым, хаос в квантовых системах может быть связан со взаимодействием с окружением, ведущем к декогеренции [21]. В настоящей работе окружение рассматривается как устройство, записывающее историю движения ОКС.

В классической физике понятие хаоса тесно связано с понятием траекторий, если его определять через классические Ляпуновские экспоненты. Траектория является физически наблюдаемой величиной, поэтому необходим прибор для ее измерения, таким прибором в классическом случае является свет, который рассеивается на частице и хранит в себе информацию о ее положении и импульсе. Так как в классической механике любые наблюдаемые физические величины коммутируют понятие траектории имеет смысл. В квантовом же случае импульс и координата являются некоммутирующими переменными и понятие траектории теряет свой смысл. Таким образом, в квантовой механике необходимо включить в описание регистрирующий прибор. Рассеянным полем, хранящем информацию о системе, фактически является квантовое окружение.

То есть следует рассматривать модель, где к ОКС подключается квантовое окружение, которое в некоторых степенях свободы записывает то, как система вела себя, эволюционируя во времени. Применяется подход декогерентных историй [30, 31].

Для корректного определения декогерентных историй необходимо выделить степени свободы, которые несут информацию о том, как ОКС двигалась. В окружении бесконечно много степеней свободы, но нести полезную информацию могут только те степени свободы, которые значимо провзаимодействовали с ОКС. Для этого удобно ввести формализм светового конуса Либа-Робинсона [35] (распространение за границами светового конуса экспоненциально подавлено), тогда эффективно взаимодействующие степени свободы будут внутри светового конуса. Поэтому в следующих разделах будет проводиться оценка прямого светового конуса. Помимо этого, данные степени свободы должны быть уже устоявшимися, то есть должны унести информацию об ОКС и перестать взаимодействовать. Также будут оцениваться необратимо отключившиеся степени свободы. Таким образом, возникает поток степеней свободы, которые несут записи историй движения ОКС, которые можно измерять, а статистика измерения даст ансамбль квантовых траекторий или декогерентных историй.

Описание динамики открытых квантовых систем хорошо изученный вопрос, когда работает Марковское приближение и можно получить Золотое правило Ферми [33]. Данное приближение оправдано, когда спектральная плотность состояний окружения меняется плавно на масштабах ширины линии излучения ОКС. В таком случае динамика описывается уравнением Линдблада [33]. Трудности возникают, когда спектральная плотность окружения становится структурированной на масштабах спектральной линии ОКС.

Подход, использованный в данной работе, основан на методе работы [11], позволяющем моделировать динамику открытых квантовых систем за пределами применимости Марковского приближения. В данном работе адаптируется данный подход и микроскопически выделяются степени свободы окружения, содержащие в себе информацию о движении ОКС. С помощью этого строится понятие декогерентных историй и вычисляется энтропия ансамбля данных траекторий.

3.1 Модель квантового волчка с толчками

В данной работе рассматривается модель квантового волчка с толчками [2], которая на классическом уровне имеет хаотическое поведение при определенных значениях величины вынужденных толчков K (далее везде используется естественная система единиц: $\hbar = 1$) и является хорошо изученной в контексте квантового хаоса:

$$\widehat{H}_S = \frac{p}{\tau}\widehat{J}_y + \frac{K}{2j}\left(\widehat{J}_z - \beta\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \tag{1}$$

Система характеризуется угловым моментом $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ с соответствующими коммутаторами:$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ $(i, j, k$ пробегают $x, y, z)$. Классический предел достигается стремлением $j \to \infty$, $\hbar \to 0$ при сохранении $\hbar j$. Первое слагаемое отвечает за прецессию вокруг оси y с угловой частотой $\dfrac{p}{\tau}$, второе связано с периодической последовательностью толчков на временном расстоянии τ.

Меняя K, движение системы меняется от интегрируемого к хаотическому. На Рис.1 представлены статистики расстояний между соседними уровнями энергий для разных значений вынужденной силы толчка K. Можно увидеть переход от статистики Пуассона к статистике Вигнера-Дайсона при значениях K от 2 до 3.

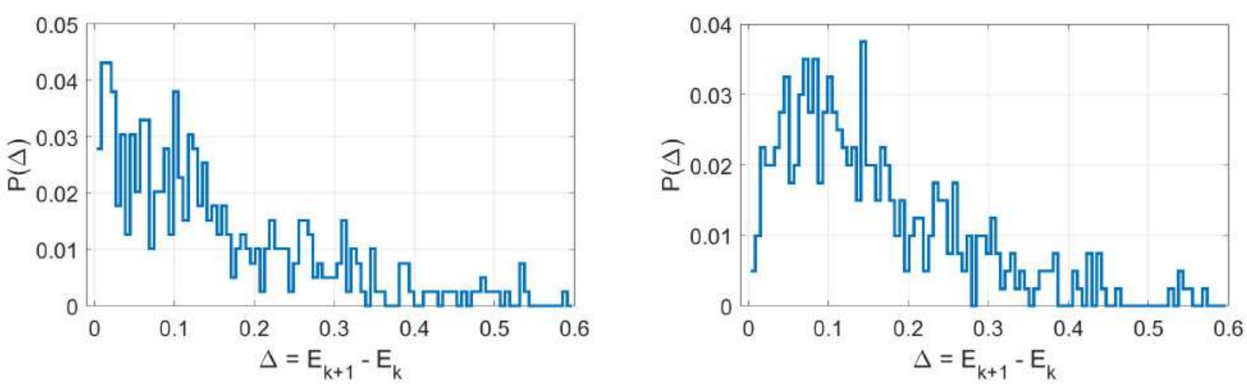

Рис. 1: Переход от интегрируемого (статистика Пуассона) к хаотическому (статистика Вигнера-Дайсона) движению; для левой статистики $K = 2$, для правой $K = 3$. Статистики построены при следующих значения: $j = 40$, $\beta = 0.1$, $\tau = 1$, $p = 1.7$. Поскольку даже при $j = 40$, всего $2j + 1$ уровней энергии, чтобы получить более менее непрерывную функцию распределения, необходимо было усреднять по целому окну K: с шириной окна 0.2 от $K = 2$ до $K = 2.2$ и от $K = 3$ до $K = 3.2$. Распределение уровней энергии плохо определено для малых систем.

Физическая реализация данной модели осуществлена в системе взаимодействующих спинов [34].

3.2 Открытый квантовый волчок с толчками в квантовом термостате

Цель работы ввести в квантовом случае траектории, чтобы получить способ диагностики квантового хаоса. Для этого необходимо подключить к модели квантового волчка с толчками окружение. В данной работе в роли окружения выступает квантовый термостат.

Полный гамильтониан системы выглядит следующим образом:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_S + \widehat{H}_E + \widehat{H}_{int} \tag{2}$$

$\widehat{H}_S$, $\widehat{H}_E$, $\widehat{H}_{int}$ представляют собой свободные гамильтонианы ОКС и окружения и гамильтониан взаимодействия между ними, соответственно.

Окружение моделируется бесконечным набором гармонических осцилляторов:

$$\widehat{H}_E = \int\limits_0^\infty \omega \widehat{a}^+(\omega)\widehat{a}(\omega) d\omega \tag{3}$$

где $\widehat{a}^+(\omega)$, $\widehat{a}(\omega)$ — бозонные операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям:

$$\left[\widehat{a}(\omega), \widehat{a}^+(\tilde{\omega})\right] = \delta(\omega - \tilde{\omega})$$

ОКС взаимодействует с окружением через коллективную степень свободы (моду) окружения $\widehat{a}$ и оператор из Гильбертова пространства ОКС $\widehat{J}_y$:

$$\widehat{H}_{int} = \widehat{J}_y(\widehat{a}^+ + \widehat{a}), \quad \widehat{a} = \int\limits_0^\infty c(\omega)\widehat{a}(\omega) d\omega \tag{4}$$

где $c(\omega)$ — константа взаимодействия (если $c(\omega) = const$, то динамика соответствует Марковской ОКС, в противном случае она имеет память [32]). Физически (4) соответствует тому, что окружение записывает траекторию проекции y-компоненты углового момента.

В представлении взаимодействия по отношению к окружению, гамильтониан полной системы становится:

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_S(t) + \widehat{J}_y(\widehat{a}^+(t) + \widehat{a}(t)), \quad \widehat{a}(t) = \int\limits_0^\infty c(\omega)\widehat{a}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{5}$$

Фоковское пространство окружения бесконечно. Однако подпространтсво статистически значимых состояний квантового поля, излучаемого ОКС, значительно меньше в силу того, что изучаемая хаотическая система подключена в определенном узле окружения и не может разрешить полное фоковское пространство окружения. Пространственно-временное разрешение излучаемого поля определяется спектральными свойствами $\widehat{a}$ — пропускной способностью окружения, как записывающего устройства.

Окружение характеризуется корреляционной функцией флуктуирующих операторов, которые влияют на ОКС. Фурье-образ корреляционной функции дает спектральную плотность окружения и определяет его пропускную способность. Корреляционная функция, описывающая флуктуации в наблюдаемой:

$$C(t) = {}_E\langle 0|\widehat{a}(t)\widehat{a}^+(0)|0\rangle_E =_E \langle 0| \int\limits_0^\infty d\tilde{\omega}d\omega c(\omega)\widehat{a}(\omega)e^{-i\omega t}c(\tilde{\omega})\widehat{a}(\tilde{\omega})|0\rangle_E =$$

$$= \int\limits_0^\infty d\tilde{\omega}d\omega e^{-i\omega t}c(\omega)c(\tilde{\omega})\delta(\omega - \tilde{\omega}) = \int\limits_0^\infty d\omega e^{-i\omega t}|c(\omega)|^2 \tag{6}$$

где $|0\rangle_E$ — вакуумное состояние окружения.

Фурье-образ, определяющий спектральную плотность окружения:

$$S(\tilde{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{i\tilde{\omega}t}dt = 2\pi|c(\tilde{\omega})|^2 \tag{7}$$

Таким образом, взаимодействие происходит не со всем бесконечным фоковским пространством, а с ограниченным потоком степеней свободы, которые возникают в дискретные интервалы времени.

Для данного метода удобно представить полную систему в эквивалентном цепочечном представлении [10]. Это необходимо для того, чтобы ввести понятие светового конуса Либа-Робинсона [35]. Для достаточно широко класса спектральных плотностей $S(\omega)$ существует унитарный оператор, переводящий систему в цепочечное представление. С помощью унитарного оператора U (Рис.2) окружение представляется в виде цепочки, где взаимодействуют только соседние моды:

$$a_n^+ = \int_0^\infty U_n(\omega)\widehat{a}^+(\omega)d\omega \tag{8}$$

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_S(t) + \widehat{J}_y h(\widehat{a_0}^+ + \widehat{a_0}) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\epsilon_n \widehat{a}_n^+\widehat{a}_n + h_n\widehat{a}_{n+1}^+\widehat{a}_n + h_n\widehat{a}_n^+\widehat{a}_{n+1}\right) \tag{9}$$

с коммутатором $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$. Зная спектральную плотность, коэффициенты ϵ_n и h_n и h можно вычислить по рекуррентным формулам с использованием ортогональных полиномов [10].

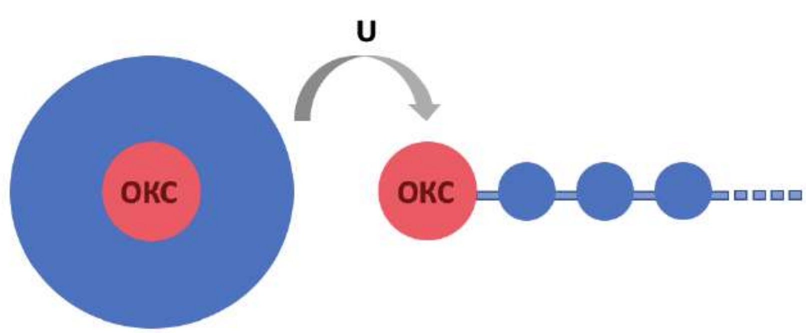

Рис. 2: Эквивалентное представление ОКС в виде цепочки.

В данном цепочечном представлении система взаимодействует с окружением через $\widehat{a}_0$ (в начальный момент времени $t = 0$ внезапно включается взаимодействие), и затем ОКС начинает возбуждать все более и более дальние степени свободы окружения.

В представлении взаимодействия по отношению к свободному термостату:

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_S(t) + \widehat{J}_y h(\widehat{a_0}^+(t) + \widehat{a_0}(t)) \tag{10}$$

Таким образом, $\widehat{a_0}(t)$ это степень свободы, с которой взаимодействует ОКС после времени t. Оператор $\widehat{a_0}(t)$ в представлении взаимодействия можно выразить через исходные цепочечные операторы, согласно:

$$\widehat{a_0}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(t) \widehat{a}_k \tag{11}$$

где $\phi_k(t) = \langle k|\phi(t)\rangle$, $|\phi(t)\rangle$ представляет собой одночастичную волновую функцию, $|k\rangle$ представляет квант, локализованный в k-м узле цепочки. Данное разложение описывает распространение оператора (*operator spreading* [36]). На Рис. 3 изображено распространени оператора $a_0(t)$.

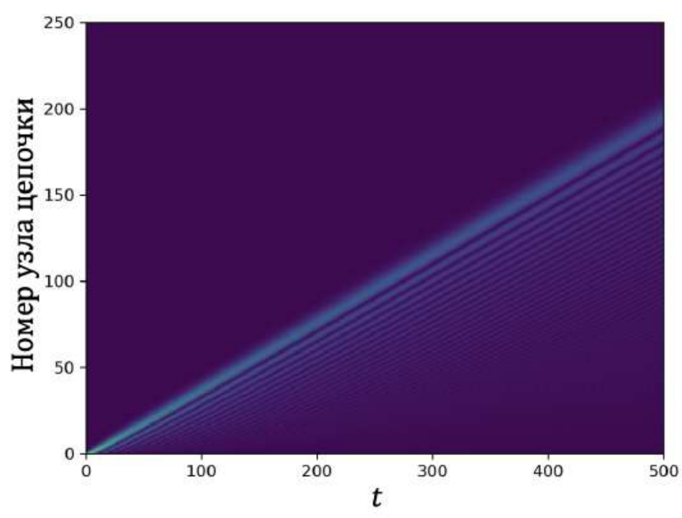

Рис. 3: Волновая функция $\phi_k(t)$, распространяющая оператор взаимодействия с течением времени. Цвет соответствует $|\phi_k(t)|$. Оператор взаимодействия $a_0(t)$ распространяется по световому конусу.

Эта одночастичная волновая функция удовлетворяет следующему (первично-квантованному) уравнению Шредингера с начальным условием, соответствующим прикреплению ОКС к нулевому узлу окружения в момент времени $t = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \phi_k(t) = \frac{1}{i} \widehat{H}_1 \phi_k(t) = i\epsilon_k \phi_k(t) + ih_k \phi_{k+1}(t) + ih_{k-1}\phi_{k-1}(t) \\ \phi_k(0) = \delta_{k0} \end{cases} \tag{12}$$

Гамильтониан, отвечающий за эволюцию одночастичной волновой функции, выглядит следующим образом:

$$H_1 = -\begin{pmatrix} \epsilon_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots \\ h_0 & \epsilon_1 & h_1 & 0 & \dots \\ 0 & h_1 & \epsilon_1 & h_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m(t)-1} & \epsilon_{m(t)} \end{pmatrix} \tag{13}$$

где $m(t)$ — количество мод окружения, возбудившихся за счет совместной эволюции с ОКС на протяжении времени t. Всего в окружении бесконечное число мод, но влияют на эволюцию системы в реальном времени только те моды, до которых успело дойти возмущение, вызванное ОКС (внезапным подключением к ней окружения). Возмущение распространяется по световому конусу Либа-Робинсона [35] с первого узла, с которым связана ОКС.

3.3 Распространение запутанности между различными степенями свободы окружения

Квантовое окружение рассматривается как записывающее устройство. Его записи можно измерять и получать декогерентные истории. Декогерентные истории могут содержаться только внутри светового конуса, поэтому необходимо уметь его оценивать. Причем, необходимо уметь определять световой конус (содержащий в себе значимые степени свободы) до решения многочастичной задачи. Ниже изложен алгоритм вычисления светового конуса априорно.

Световой конус позволяет определять какие степени свободы значимы, а какие нет. Область вне светового конуса состоит из степеней свободы, которые будут значительно возбуждены только в будущие моменты времени, либо вообще никогда не будут возбуждены. В частности, для каждого узла цепочки существует момент времени, после которого он становится статистически значимым для эволюции системы.

Эволюционируя во времени, ОКС будет поглощать и испускать кванты в окружение. Для того, чтобы оценить сколько мод возбудила ОКС необходимо ввести меру, определяющую влияние ОКС на рассматриваемую моду. Для этого удобно использовать коммутатор $[\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+]$, который будет показывать влияет ли оператор $a_0(t)$ на a_j. Если мода успела возбудиться, то норма данного коммутатора будет отлична от нуля:

$$\|[\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+]\| = \sqrt{Tr\left([\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+][\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+]^+\right)} \tag{14}$$

Для простейшего случая линейного окружения данный коммутатор будет C-числом, поскольку $[\widehat{a}_i, \widehat{a}_j^+] = \delta_{ij}$. Таким образом, вместо следа от произведения коммутаторов можно вычислять их вакуумное среднее:

$$C_j(t) = \begin{cases} Tr\left([\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+][\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+]^+\right) \\ \langle 0|[\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+][\widehat{a}_0(t), \widehat{a}_j^+]^+|0\rangle \end{cases} = M_j(t) \begin{cases} Tr 1 \\ \langle 0|0\rangle \end{cases} \tag{15}$$

Данная функция представляет из себя OTOC. Условие $C_j(t) \geq 0$ будет означать, что мода $\phi_j(t)$ провзаимодействовала с ОКС в заданный момент времени. Если $C_j(t)$ пренебрежимо мала, то ОКС не возбудила данную моду.

Световой конус определяется не мгновенной интенсивностью взаимодействия моды, а средней интенсивностью взаимодействия моды на интервале времени от 0 до t. В течение времени t внутрь светового конуса попадают только те моды, которые на всем интервале в среднем значимо взаимодействуют. Следовательно, необходимо рассматривать только статистически значимые взаимодействия в течение выбранного временного интервала и устранить внезапные кратковременные возбуждения мод окружения, которые будут давать пренебрежимо малый вклад. Предыдущее условие интегрируется по времени:

$$\langle C_j^+(t)\rangle = \int\limits_0^t C_j(\tau)d\tau \tag{16}$$

Таким образом, рассматриваются моды, которые эффективно подключились и взаимодействуют с ОКС, влияя на их совместную эволюцию.

Информацию об ОКС несут не обязательно цепочечные исходные степени свободы a_j, это могут быть их произвольные линейные комбинации, поэтому необходимо уметь учитывать статистическую значимость таких линейных комбинаций и определять попадают ли они внутрь светового конуса.

Рассмотрим одночастичное состояние, статистическую значимость которого необходимо оценить $|\chi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k |k\rangle$, и введем соответствующие операторы рождения и уничтожения: $\widehat{\chi}^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k \widehat{a}_k^+$. Тогда, средняя значимость данного состояния на интервале $[0, t]$ с использованием (12),(15) и (16):

$$\int\limits_0^t \langle 0|[\widehat{a}_0(t), \sum_k \chi_j \widehat{a}_j^+][\widehat{a}_0(t), \sum_l \chi_l \widehat{a}_l^+]^+|0\rangle d\tau =$$

$$\langle\chi| \int\limits_0^t |\phi(\tau)\rangle\langle\phi(\tau)| d\tau |\chi\rangle = \langle\chi|\rho_+(t)|\chi\rangle \tag{17}$$

где вводится:

$$\rho_+(t) = \int\limits_0^t |\phi(\tau)\rangle\langle\phi(\tau)| d\tau \tag{18}$$

Чтобы решить, нужно ли учитывать данное состояние, необходимо ввести порог a_{cut}. Метрика, определяющая является ли значимым вклад состояния χ или нет:

$$g_+(\chi, t) = \langle\chi|\rho_+(t)|\chi\rangle - a_{cut} \tag{19}$$

Если $g_+(\chi, t) < 0$, то вкладом данной моды можно пренебречь, поскольку он пренебрежимо мал с учетом заданного порога.

Данная метрика определяет границу светового конуса Либа-Робинсона. Моды, лежащие внутри светового конуса, удовлетворяют уравнению:

$$g_+(\chi, t) > 0 \quad \text{условие образует прямой световой конус (пск)} \tag{20}$$

На Рис.4 представлены моды (узлы цепочки), подключающиеся к ОКС с течением времени.

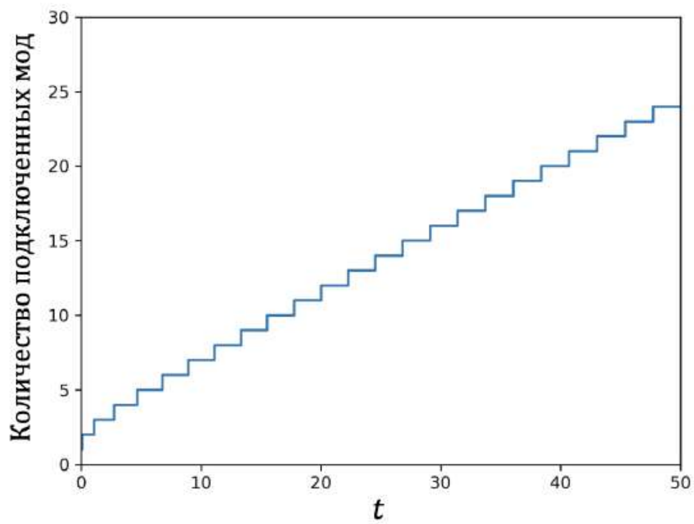

Рис. 4: Подключенные к ОКС моды (узлы цепочки) в зависимости от времени, образуют прямой световой конус (20).

Для (20) используется абсолютный порог a_{cut}, более физично использовать относительный порог значимости, в том числе, чтобы исключить влияние нормировки $\rho_+(t)$. Его можно определить следующим образом:

Для временного инетрвала $[0, t]$ существует наиболее значимая мода:

$$\chi_m = argmax_\chi \frac{\langle\chi|\rho_+(t)|\chi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle} \tag{21}$$

Ее средняя значимость дается максимальным собственным значением π_1 матрицы ρ_+ (18) за счет вариационного принципа Релея-Ритца. Порог a_{cut} можно задать, выбрав относительный порог r_{cut} (например, $r_{cut} = 10^{-4}$) следующим образом: $a_{cut} = r_{cut}\pi_1$. Тогда внутренняя часть светового конуса состоит только из состояний, статистический вклад которых не является ничтожным относительно максимального:

$$g_+(\chi, t) = \langle \chi | \rho_+(t) | \chi \rangle - r_{cut} \pi_1 > 0 \tag{22}$$

На Рис.5 представлена матрица (18), вычисленная в цепочечном базисе.

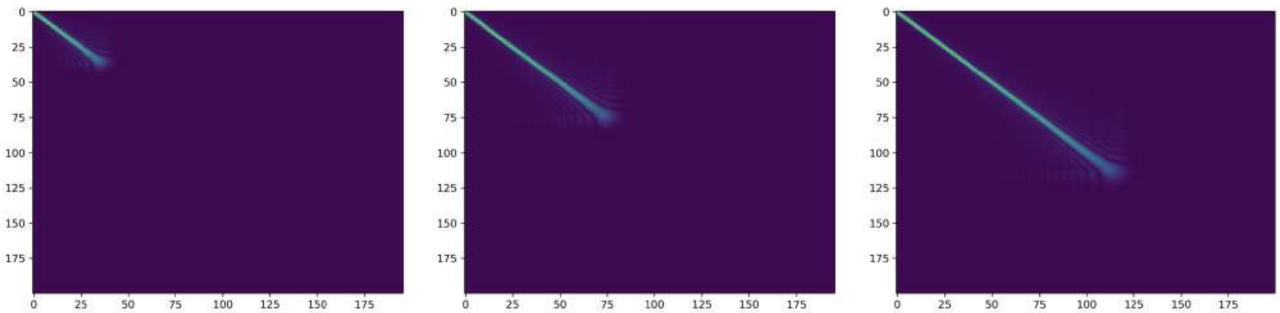

Рис. 5: Матричные элементы матрицы плотности ρ_+ (18) в базисе узлов цепочки. Ненулевая часть диагонали растет по мере эволюции (первое изображение $t = 100$, второе $t = 200$, третье $t = 300$) и соответствует световому конусу.

Метрика Либа-Робинсона определена для произвольной моды. То есть можно для произвольной моды вычислить, попала ли мода внутрь прямого светового конуса или нет (22). Таким образом, можно рассматривать моду не только в цепочечном базисе, а и в произвольно повернутом.

Задача решается на интервале времени $[0, T]$. Ожидается, что вблизи $t = 0$ подключающиеся моды будут интенсивно появляться. Световой конус быстро распространяет возмущение. Недостатком светового конуса в цепочечном базисе является то, что они на самом деле не являются статистически независимыми. Можно рассмотреть аналогию с теоремой Котельникова и показать, что истинно независимые степени свободы будут появляться в базисе, где скорость распространения светового конуса минимальна, а интервалы между временами появления мод пропорциональны ширине спектральной плотности окружения (пропускной способности окружения как записывающего устройства) [11].

К базису, где скорость подключения мод минимальна, можно перейти с помощью унитарных преобразований. Алгоритм получения данных мод приведен в Приложении А. В дальнейшем будет использоваться именно данный базис.

Таким образом, можно найти моды κ_k^{in}, подключающиеся к ОКС с минимальной скоростью, а также дискретные времена их подключения t_k^{in}:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1^{in} \\ \vdots \\ \kappa_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \phi_1^{in} \\ \vdots \\ \phi_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{1,0}^{in} & \chi_{1,1}^{in} & \cdots \\ \chi_{2,0}^{in} & \chi_{2,1}^{in} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{in} \\ \vdots \\ \phi_{m_{in}(T)}^{in} \end{pmatrix} \tag{23}$$

где W совершает необходимый поворот.

От изначальных операторов рождения и уничтожения можно формально перейти к операторам рождения и уничтожения, соответствующих минимальному световому конусу с помощью преобразования Боголюбова W [11]:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{in} \\ \widehat{\kappa}_2^{in} \\ \vdots \end{pmatrix} = W^{+} \begin{pmatrix} \widehat{a}_0^{in} \\ \widehat{a}_1^{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{24}$$

В Гамильтониане, ограниченном световым конусом, в картине взаимодействия происходит пренебрежение запутанностью между степенями свободы, когда их статистическая значимость ниже порога.

Полное совместное состояние квантового волчка и термостата $|\Psi(t)\rangle$ эффективно эволюционирует следующим образом :

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle = \left[\widehat{H}_S(t) + \sum_{k=1}^{m_{in}(t)} \left[\widehat{J}_y\langle\phi(t)|\kappa_l^{in}\rangle\widehat{\kappa}_l^{in} + \widehat{J}_y\langle\phi(t)|\kappa_l^{in}\rangle^*\widehat{\kappa}_l^{in+}\right]\right]|\Psi(t)\rangle \tag{25}$$

где $\langle\phi(t)|\kappa^{in}\rangle = \chi^{in}$.

3.4 Необратимое отключение мод

Записи, несущие информацию об ОКС должны быть устоявшимися, поэтому необходимо рассмотреть моды, которые необратимо отключаются от ОКС.

Возможны два различных случая отключающихся мод (выходящих мод): моды никогда не взаимодействовали с ОКС; моды были связаны с ОКС, а затем необратимо отключились от нее. Первая ситуация не содержит никакой информации об ОКС, вследствие чего не рассматривается. Необходимо проследить эволюцию второго случая. Мода, отключившаяся от ОКС в момент времени t_l^{out}, должна быть линейной комбинацией κ_1^{in}, κ_2^{in}, ..., $\kappa_{m(t_l^{out})}^{in}$. Иными словами, новая отключившаяся мода должна до этого находиться в подпространтсве мод, которые подключились к ОКС за время t_l^{out}. Моды, которые не включены в данную линейную комбинацию, никогда не взаимодействовали с ОКС.

Входящие моды подключаются в определенные дискретные моменты времени, когда условие $g_+(\chi, t) < 0$ сменяется $g_+(\chi, t) > 0$. Последовательность таких времен t_1^{in}, t_2^{in}, ..., $t_{m_{in}(T)}^{in}$ определяется способом, описанным выше. Для выходящих мод можно также ввести меру статистической значимости на момент времени t, определяющую отключение моды от ОКС:

$$\langle C_\chi^-(t,\nu)\rangle = \langle\chi| \int_t^T |\phi(\tau)\rangle\langle\phi(\tau)|d\tau|\chi\rangle = \langle\chi|\rho_-(t)|\chi\rangle \tag{26}$$

где введена матрица:

$$\rho_-(t) = \int_t^T |\phi(\tau)\rangle\langle\phi(\tau)|d\tau \tag{27}$$

Моду можно считать необратимо отключившейся, если OTOC, усредненный по будущим моментам времени (27), пренебрежимо мал.

Поскольку информацию об ОКС содержат необратимо отключившиеся моды, которые до этого с ней взаимодействовали, необходимо искать необратимо отключившиеся моды в подпространстве подключенных мод κ_1^{in}, κ_2^{in}, ..., $\kappa_{m_{in}(T)}^{in}$, находящихся внутри минимального светового конуса (24). Тогда интересующие моды будут удовлетворять следующему условию (отсутствию статистической значимости):

$$g_-(\kappa^{in}, t) = \langle\kappa^{in}|\rho_-(t)|\kappa^{in}\rangle - a_{cut} < 0 \tag{28}$$

Данные моды можно найти по аналогии с поиском подключившихся мод. Алгоритм нахождения необратимо отключившихся мод описан в Приложении В. Обозначим t_k^{out}, как момент времени отключения мод κ_k^{out}.

Таким образом, некоторым унитарным поворотом базиса U_k находятся необратимо отключившиеся моды, содержащие в себе информацию об ОКС:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{out+} \\ \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{in+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})}^{in+} \end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_k^{out+} \\ \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{r(t_k^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_k \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{r(t_k^{out})}^{rel+} \end{pmatrix} \tag{29}$$

где U_1 матрица размерности $m_{in}(t_1^{out}) \times m_{in}(t_1^{out})$ — диагонализует матрицу плотности для поиска первой отключившейся моды κ_1^{out} и так далее, U_k матрица размерности $r(t_k^{out}) \times r(t_k^{out})$ — диагонализует матрицу плотности для поиска отключившейся моды κ_k^{out}.

К моменту времени t_1^{out}, когда отключилась первая мода κ_1^{out}, остались подключенными $m_{in}(t_1^{out}) - 1$ мод. Эти моды обозначены индексом rel и их удобно называть релевантные моды, они статистически значимы для будущей эволюции. В момент времени t_k^{out} имеется $k-1$ выходящая мода и $r(t_k^{out})$ релевантная мода:

$$r(t_k^{out}) + k - 1 = m_{in}(t_k^{out})$$

.

Полное состояние системы $|\Psi(t)\rangle$ эволюционирует на временном интервале $[t_k, t_k^{out}]$, где t_k время предыдущего подключения или отключения моды, с эффективным гамильтонианом $\widehat{H}_{eff}(t)$:

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle = \widehat{H}_{eff}(t)|\Psi(t)\rangle$$

$$\widehat{H}_{eff}(t) = \widehat{H}_S(t) + \sum_{k=1}^{r(t)} \left[\widehat{J}_y \langle \phi(t)|\kappa_l^{rel}\rangle \widehat{\kappa}_l^{rel} + \widehat{J}_y \langle \phi(t)|\kappa_l^{rel}\rangle^* \widehat{\kappa}_l^{rel+} \right] - \\ - \sum_{kl=1}^{r(t)} D_{kl}(t) \widehat{\kappa}_l^{rel+} \widehat{\kappa}_k^{rel} \quad (30)$$

где $D(t) = i \ln U_k/(t_k^{out} - t_k)$.

В данном методе процесс отключения мод — это обращенный во времени процесс подключения мод и наоборот. Следовательно, ожидается, что число подключившихся и отключившихся мод будет расти во времени с одинаковым темпом. А их разница - релевантные моды асимптотически постоянны. На Рис.6 изображено количество подключившихся мод, отключившихся мод и релевантных мод с течением времени. Видно, что количество релевантных мод насыщается и практически не изменяется в течение эволюции системы.

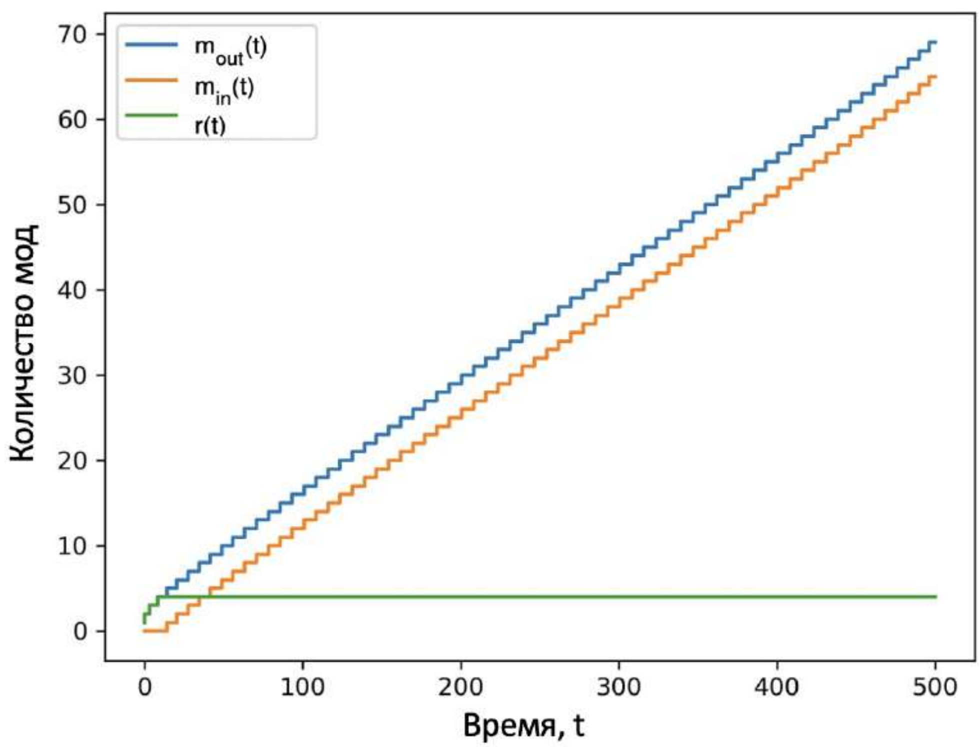

Рис. 6: Количество мод в системе с течением времени, $m_{in}(t)$, $m_{out}(t)$, $r(t)$ — подключившиеся, отключившиеся и релевантные моды, соответственно.

3.5 Расчет энтропии ансамбля декогерентных историй

Таким образом, в двух предыдущих главах был построен прямой и обратный световой конус, подключившиеся к ОКС моды (23) и необратимо отключившиеся от ОКС моды (29). Именно моды (29) несут в себе полезную информацию о движении ОКС, они значимо с ней провзаимодействовали, а затем необратимо отключились от нее. С помощью них строится квантовый аналог траектории и вычисляется энтропия ансамбля данных траекторий, чему посвящена данная глава.

Можно взять след по необратимо отключившимся модам, как только они появляются во время движения в реальном времени:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$$

$$\rho_{rel}(t) = Tr_{\kappa_1^{out}\dots\kappa_k^{out}}\left[|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\right] \tag{31}$$

Редуцированная матрица плотности эволюционирует со временем согласно уравнению фон Неймана:

$$\partial_t\rho_{rel}(t) = i\left[\widehat{H},\, \rho_{rel}(t)\right] \tag{32}$$

Поскольку в данной работе основная идея заключалась в рассмотрении окружения как записывающего устройства, нужно уметь отслеживать статистику записей, результатов наблюдений мод.

Существует альтернатива к взятию частичного следа в уравнении (32), позволяющая ввести квантовые траектории. Когда новые отключившиеся моды образуются в момент $t = t_k^{out}$, можно применить фон Неймановскую модель измерения.

До $t = t_k^{out}$ мода κ_k^{out} была подключена к ОКС. Она была в запутанном состоянии с ОКС в силу разложения Шмидта:

$$|\Psi(t_k^{out})\rangle = \sum_q c_q(k)|\Psi_{col}^{(q)}(t_k^{out})\rangle_{rel} \otimes |\Psi_{jump}^{(q)}(t_k^{out})\rangle_{\kappa_k^{out}} \tag{33}$$

Индекс rel означает ОКС с релевантными модами, а κ_k^{out} относится к новообразованной отключившейся моде, q нумерует базисные элементы для отключившейся моды.

Поскольку данная мода κ_k^{out} необратимо отключившаяся, амплитуды $c_q(k)$ от времени не зависят, это инварианты. Возникает поток инвариантов движения, они перестают зависеть от времени эффективно по порогу значимости. Таким образом, вид (34) инвариантен во все будущие моменты времени и возникает инвариантная структура запутанности для будущей эволюции. Также это было подтверждено численно.

В данной работе именно возникающая инвариантная структура запутанности несет в себе ансамбль декогерентных историй.

Тогда, согласно модели измерений фон Неймана, можно провести схлопывание волновой функции (34) (альтернатива взятию частичного следа в (32)) и интерпретировать уравнение как k-ый квантовый скачок в момент времени $t = t_k^{out}$:

$$|\Psi(t_k^{out})\rangle \to ||\Psi_{collapsed}^{(q)}(t_k^{out})\rangle \quad \text{с вероятностью: } |c_q(k)|^2 \tag{34}$$

Такие скачки необратимы во времени.

К моменту t отключилось $m_{out}(t)$ мод. Каждое отключение мод сопровождается квантовым скачком, который получается рекуррентным применением процедуры измерения:

$$\begin{aligned} &|\Psi(t_1^{out})\rangle \to |\Psi_{coll}^{(q_1)}(t_1^{out})\rangle_{rel} \\ &\qquad |\Psi_{coll}^{(q_1)}(t_2^{out})\rangle_{rel} \to |\Psi_{coll}^{(q_1q_2)}(t_2^{out})\rangle_{rel} \\ &\qquad\qquad |\Psi_{coll}^{(q_1q_2)}(t_3^{out})\rangle_{rel} \to |\Psi_{coll}^{(q_1q_2q_3)}(t_3^{out})\rangle_{rel} \quad \text{и тд.} \end{aligned} \tag{35}$$

Следовательно, перед временем t происходит $m_{out}(t)$ квантовых скачков. Они характеризуются историей выборов $h = (q_1, q_2, \ldots, q_k) = \{q_k\}_{k:\, t_k^{out} \leq t}$, появляющихся с вероятностями:

$$P(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \prod_{k:\, t_k^{out} \leq t} |c_{q_k}(k)|^2 \tag{36}$$

Это и есть предлагаемое определение декогерентных историй.

При этом среднее по всем декогерентным историям h до момента времени t воспроизводит редуцированную матрицу плотности (32):

$$\rho_{rel}(t) = \overline{\left[|\Psi^h_{coll}(t)\rangle_{rel\;rel}\langle\Psi^h_{coll}(t)|\right]}_{\text{по всем историям}} \tag{37}$$

Иными словами, среднее наблюдаемых по всем историям соответствует полной многочастичной квантовой динамике ОКС по порогу значимости.

Статистический ансамбль историй прыжков закодирован в возникающей инвариантной структуре запутанности, не меняющейся в будущие моменты времени. По аналогии с магнитофонной лентой, записывающей и не изменяющей записанные данные.

Таким образом, можно ввести определение энтропии ансамбля декогерентных историй:

$$S = -\sum_{\tilde{q}=(q_1,\dots q_N)} P(\tilde{q})\ln(P(\tilde{q})) \tag{38}$$

Резюмируя, траектория — это не просто абстрактный объект, для ее наблюдения необходим измерительный прибор. За счет добавления окружения, рассматриваемого как записывающее устройство, информация о траектории записывается в поток необратимо отключившихся степеней свободы, энтропия ансамбля которых задается формулой (38).

3.6 Обсуждение результатов

Рассмотрение основано на работе [11], где была изложена процедура моделирования ОКС за рамками Марковского приближения. В данной работе проводилась адаптация изложенной процедуры и ее интерпретация с целью выявления критерия хаотического поведения на основе введения понятия квантовой траектории, как декогерентной истории.

В данной работе рассматривалось следующее начальное состояние всей системы: $|\Psi(0)\rangle = |-J_y\rangle \otimes |0\rangle_E$ квантовый волчок ориентирован вниз, термостат находится в вакуумном состоянии.

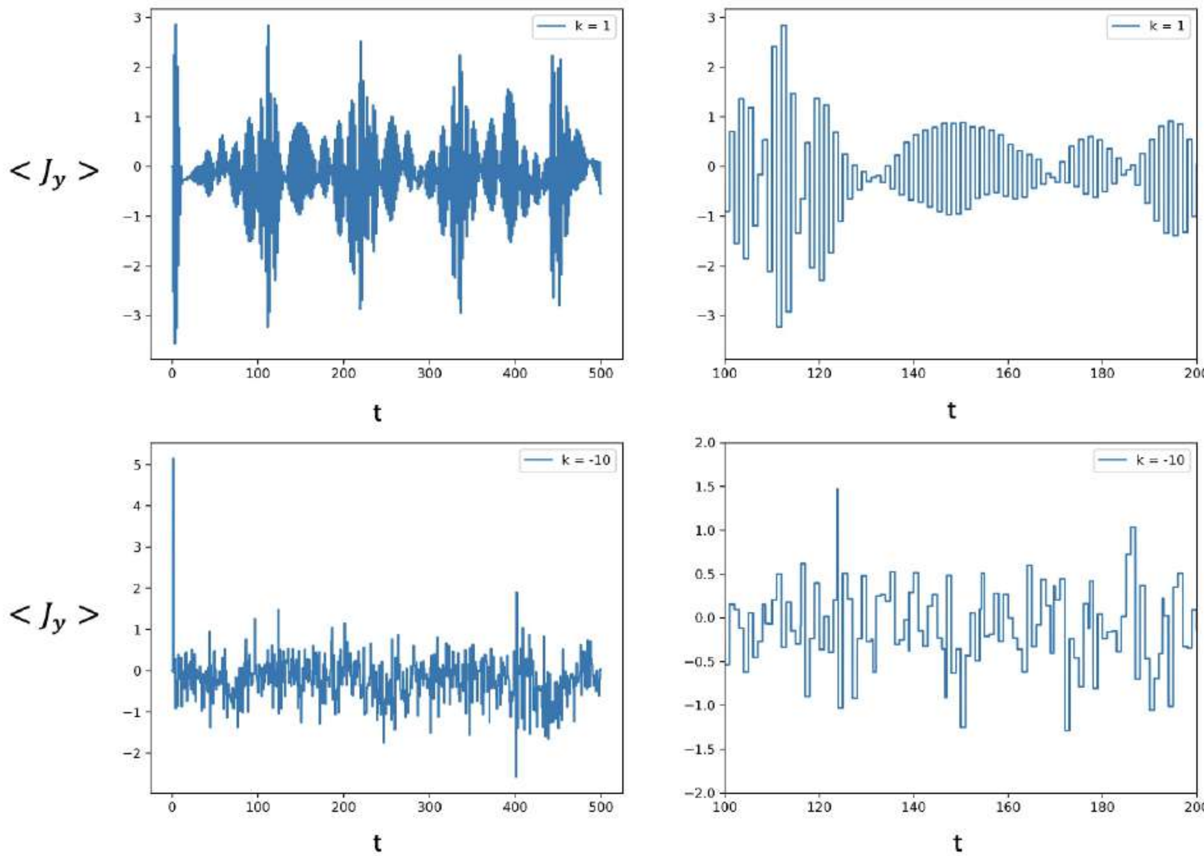

Рис. 7: Среднее значение J_y в зависимости от времени вдоль одной траектории. Верхние изображения для регулярного движения $K = 1$; нижние изображения для $K = -10$ (справа представлена левая динамика в увеличенном масштабе).

Коэффициенты для цепочечного представления окружения брались следующими: $\epsilon_n = 1$, $h_n = 0.2$, $h = 0.05$. Параметры выбирались из тех соображений, чтобы $h = 0.05$ связь с окружением была достаточно слабой и волчок не сильно возмущался термостатом, а окружение скорее регистрировало траекторию, чем нарушало свободное движение волчка. А энергии на узле ϵ_n и h_n выбраны так, чтобы полоса пропускания окружения соответствовала частотам перехода волчка. Динамика решалась на временном интервале $[0, 500]$.

На Рис. 7 изображено поведение волчка с толчками в случае интегрируемого и хаотического движения вдоль одной траектории.

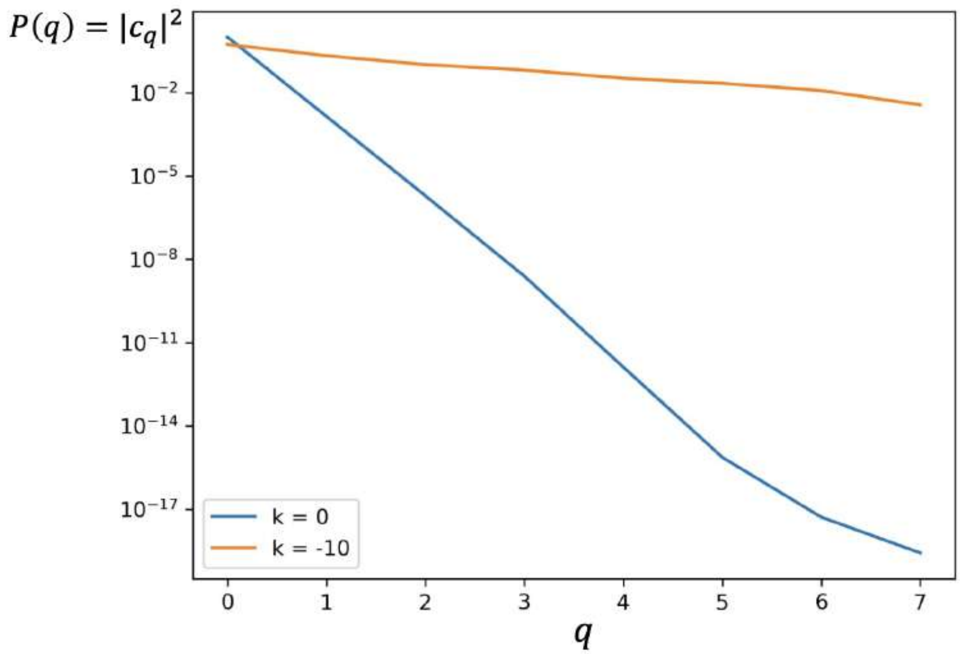

Рис. 8: Распределение вероятности квантовых скачков $|c_q|^2$ в двух случаях для $K = 0$ (синяя кривая) и для $K = -10$ (оранжевая кривая). В динамике участвовало 7 квантов.

Энтропия считалась с учетом упрощенного предположения присутствия эргодичности для квантовых траекторий (подразумеваются дальнейшие исследования). В том смысле, что усреднение по всем траекториям эквивалентно усреднению внутри одной достаточно длинной траектории по всем выборам. Именно усреднение по одной траектории использовалось в данном решении.

Как только появлялась необратимо отключившая степень свободы, для нее разыгрывался квантовый скачок. На Рис. 8 представлено распределение вероятности квантовых скачков $|c_q|^2$(всевозможных выборов). Рисунок показывает, что для интегрируемого случая при $K = 0$ распределение вероятности очень узкое, а для хаотического режима $K = -10$ распределение вероятностей скачков очень широкое.

Данная процедура повторялась для всего временного интервала. Рассматривалась одна случайная реализация выборов квантовых переходов.

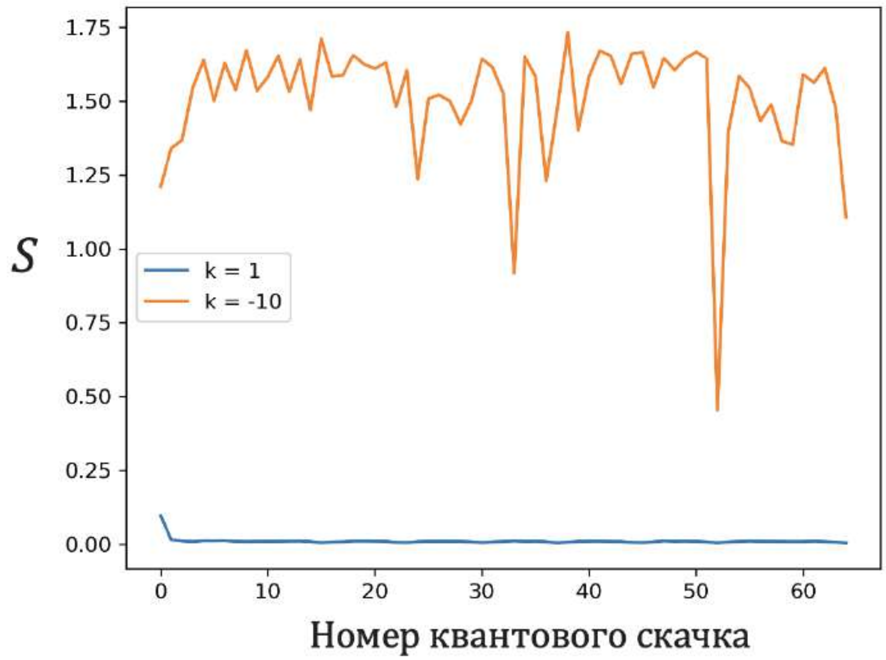

Рис. 9: Мгновенное производство энтропии вдоль одной траектории для $K = 1$ (синяя кривая) и для $K = -10$ (оранжевая кривая).

На Рис. 9 изображено мгновенное производство энтропии в зависимости от номера квантового скачка. В интегрируемом и хаотическом режиме энтропия вдоль одной траектории ведет себя кардинально разным способом.

Когда q скачков уже случилось и настал момент следующего скачка, можно разложить волновую функцию системы по разложению Шмидта (33) и из предыдущего набора значимых мод выделить новый набор значимых мод и моду, которая необратимо отключается (по которой проводится проецирование):

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{P_{q+1}} c_{P_{q+1}} |\Psi_{col}(t, P_1, ..., P_q, P_{q+1})\rangle_{rel} \otimes |\Psi_{jump}(t)\rangle_{P_{q+1}} \tag{39}$$

На $q+1$ шаге возникает новое распределение квантовых скачков (набор альтернатив). Энтропия за один скачок увеличится:

$$\Delta S = -\sum_{P_{q+1}} c_{P_{q+1}} \ln(c_{P_{q+1}}) \tag{40}$$

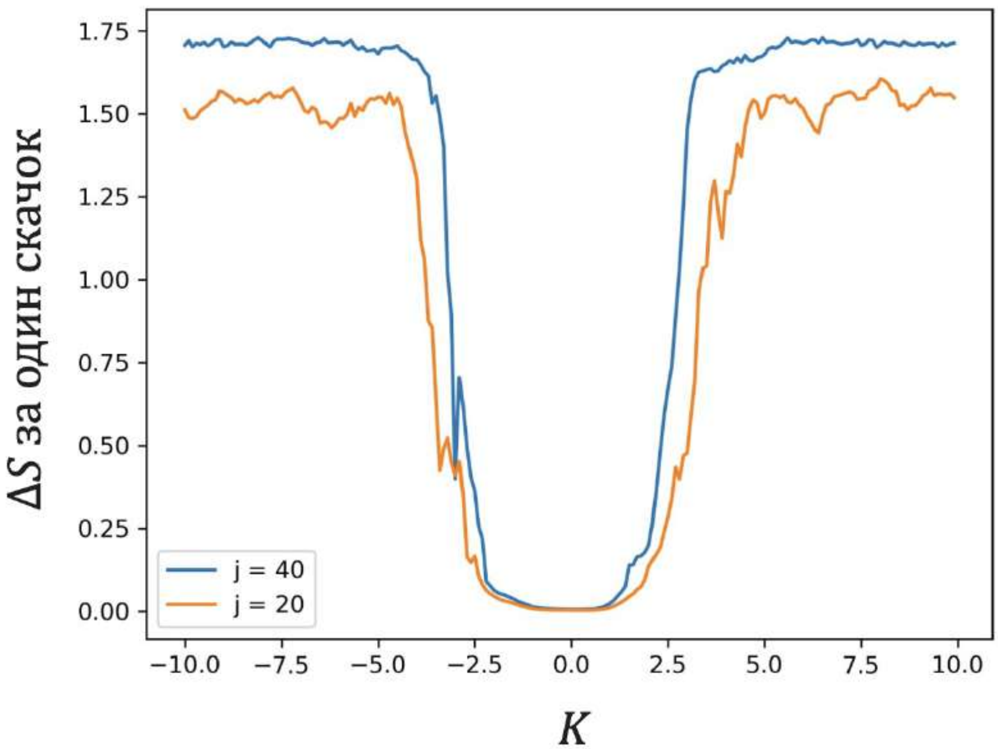

Рис. 10: Производство энтропии (41) в зависимости от величины параметра удара K. Можно видеть резкое увеличение производства энтропии в области перехода динамики из интегрируемой в хаотическую. Расчет проводился для двух разных квантовых чисел волчка с толчками $j = 20$ (оранжевая кривая), для $j = 40$ (синяя кривая)

Средняя энтропия для одной траектории:

$$\langle \Delta S \rangle = \frac{1}{n} \sum_{n} \Delta S \tag{41}$$

На Рис. 10 представлено среднее производство энтропии за один квантовый скачок. Видно, что ее поведение сильно меняется при переходе от интегрируемого (рост энторопии практически отсутствует) к хаотическому случаю (сильный рост энтропии). Подтвердилось, что в интегрируемом случае траектории ведут себя более регулярным образом и энтропия практически не растет, тогда как при переходе к хаотическому случаю траектории сильно перемешиваются и энтропия растет достаточно резко. Причем с увеличением

j увеличивается угол роста энтропии, возможно при $j \to \infty$ производство энтропии будет претерпевать явный разрыв.

Таким образом, предполагается, что рост энтропии вдоль одной траектории может являться критерием хаоса.

4 Квантовый хаос как окружение

В предыдущем разделе было рассмотрено, как с помощью декогерентных историй в окружении исследовать переход от регулярного движения к хаотическому. Вторая смежная задача заключается в рассмотрение хаотического окружения конечного объема, и как в нем возникают декогерентные истории. Хаотическое окружение можно задать с помощью бильярдной системы [2–4]. Для решения данной задачи необходимо уметь вычислять собственные функции и собственные значения бильярдной системы, а также уметь описывать процесс диссипации в такой системе. Предлагаемый аппарат изложен в данном разделе.

4.1 Бильярдные системы

Классические динамические бильярды, в двумерном случае, задаются движением точечной частицы (в некоторой ограниченной области $\Omega \subset R^2$), упруго отталкивающейся от ее стенок ($\partial\Omega$, L — периметр бильярда). Форма стенок определяет динамику бильярда, она может быть интегрируемой, хаотической или смешанной.

В квантовом случае бильярдные системы описываются стационарным уравнением Шредингера:

$$(-\frac{\hbar}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}))\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r})\,, \quad V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in \Omega \\ \infty, & \mathbf{r} \notin \Omega \end{cases} \tag{42}$$

эквивалентным уравнению Гельмгольца с граничным условием Дирихле ($\hbar = 2m = 1$):

$$\begin{cases} \Delta\psi_n(\mathbf{r}) + k_n^2\psi_n(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \Omega \\ \psi_n(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{43}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, $\psi_n(\mathbf{r})$ — волновая функция из гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций ($\int_D |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ —

вероятность обнаружить частицу внутри области $D \subset \Omega$) (собственные функции, соответствующего гамильтониана), $k_n^2 = E_n$ — собственные значения.

Поскольку форма границы определяет динамику бильярда, можно через границу, используя формулы Грина, определить спектр гамильтониана и собственные функции и задать таким образом окружение. Функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет уравнению:

$$(\Delta + k^2)G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{44}$$

Рассмотрим интеграл по области Ω от разности $\psi(\mathbf{r}') \times (41) - G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times (42)$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\psi(\mathbf{r}')\Delta' G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta'\psi(\mathbf{r}')\right] d^2\mathbf{r}' = \\ &\quad = \int_\Omega \left[\psi(\mathbf{r}')\left(-k^2 G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) - G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(-k^2)\psi(\mathbf{r}')\right] d^2\mathbf{r}' = \\ &\qquad = \int_\Omega \psi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' \end{aligned} \tag{45}$$

В двумерном случае функция Грина для свободной частицы выражается через функию Ханкеля первого рода:

$$G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \tag{46}$$

Вторая формула Грина:

$$\oint_\Omega \left[\psi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_k}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \psi}{\partial n'}(\mathbf{r}')\right] ds' = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}); & \mathbf{r} \in \Omega \backslash \partial\Omega \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}); & \mathbf{r} \in \partial\Omega \\ 0; & \text{в других случаях} \end{cases} \tag{47}$$

Производная по нормали:

$$u(s) := \frac{\partial}{\partial n}\psi(\mathbf{r}(s)) := \mathbf{n}(s)\nabla\psi(\mathbf{r}(s)) \tag{48}$$

s параметризует границу бильярда.

Таким образом взяв производную по нормали от (45), можно получить [3]:

$$u(s) = -2\oint_\Omega \frac{\partial}{\partial n} G_k(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(s'))u(s')ds' \tag{49}$$

где:

$$\frac{\partial}{\partial n} G_k(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(s')) = \frac{ik}{4}\frac{\mathbf{n}(s)(\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s'))}{|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s')|} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s')|)$$

Это дает интегральное уравнение на нормальную производную волновой функции:

$$u(s) = \oint_\Omega Q_k(s,s')u(s')ds' \quad Q_k(s,s') = -\frac{ik}{2}\frac{\mathbf{n}(s)(\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s'))}{|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s')|} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s')|) \tag{50}$$

В дискретизованном виде уравнение перепишется ($\Delta s = L/N$, N - число разбиений на границе):

$$u(s_k) = \Delta s \sum_{i=0}^{N-1} Q_k(s_k, s_i)u(s_i) \tag{51}$$

А в матричном виде:

$$A_k u = 0\,, \quad A_{i,j} = \delta_{ij} - \Delta s Q_k(s_k, s_i) \tag{52}$$

Уравнение имеет нетривиальное решение, когда определитель $det(A_k) = 0$. Для численного решения уравнений вместо определителя лучше находить сингулярное разложение матрицы $A = USV^+$ [3], определителем в таком случае является $|det(A)| = |\prod SV_i|$.

Поскольку исходное интегральное уравнение было дискретизировано, наименьшее сингулярное значение никогда не становится равным нулю, а лишь является очень малым. Таким образом, минимумы наименьшего сингулярного значения являются аппроксимациями собственных значений интегрального уравнения.

Сингулярные векторы, соответствующие минимальным сингулярным значениям, являются аппроксимациями нормальной производной $u(s)$.

Тогда собственные функции для области Ω могут быть рассчитаны [3]:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4}\oint_{\partial\Omega} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}(s)|)u(s)ds\,, \quad \text{для } \mathbf{r}\in\Omega\backslash\partial\Omega \tag{53}$$

Приведенные выше соотношения были реализованы в виде пакета программ на Python. На Рис. 11 представлено различное поведение собственных функций бильярдной системы в интегрируемом (круговой бильярд) и хаотическом (стадион Бунимовича) случаях.

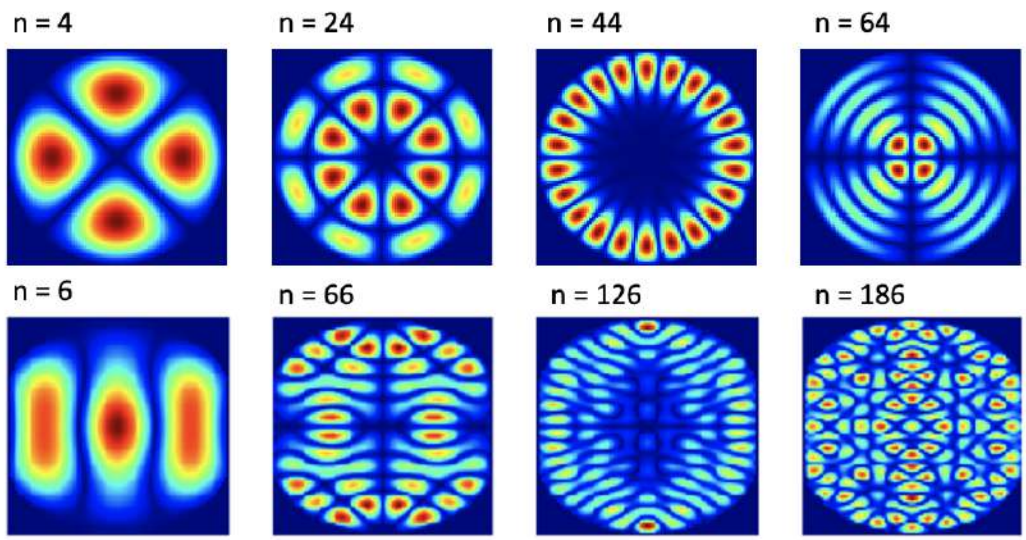

Рис. 11: Распределение $|\psi^2(x, y)|$ для соответствующих уровней энергии для двух случаев квантового бильярда: верхняя строчка — круговой бильярд (интегрируемый), нижняя — стадион Бунимовича с радиусом равным прямой части (хаотический). Собственные состояния отражают структуру соответствующей классической динамики.

4.2 Модель кубита в хаотическом окружении

Следующий шаг состоит в том, чтобы выяснить, какие режимы диссипации присутствуют в системе, помещенной в хаотическое бильярдное окружение.

Для этого рассматривалась простейшая модель кубита в потенциале бильярда:

$$\widehat{H} = \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \alpha(\sigma_+\widehat{\psi} + \sigma_-\widehat{\psi}^+) + \sum_{n=0}^{n_{max}} E_n\widehat{\psi}_n^+\widehat{\psi}_n \tag{54}$$

где $\widehat{\psi}_n^+$, $\widehat{\psi}_n$ — операторы рождения и уничтожения соответствующих мод бильярда с энергиями E_n, Ω — разница между уровнями кубита, n_{max} — максимальное количество уровней бильярда. Естественно, в бильярде число уровней энергии бесконечно, в работе вводилось ограничение на конечное число уровней энергии $E_n \leq E_{n_{max}}$(поскольку из-за конечной ширины спектральной линии испускания кубита уровни, которые находятся далеко за пределами этой ширины можно не учитывать); α — константа взаимодействия.

В момент времени $t = 0$ кубит помещается в максимально локализованную в рассматриваемом диапазоне энергий в точке $\mathbf{x}^{'}$ орбиталь бильярда:

$$\phi_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{'}) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \langle \mathbf{x}|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\mathbf{x}^{'}\rangle \tag{55}$$

Таким образом, операторами рождения и уничтожения в состоянии орбитали являются:

$$\widehat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \widehat{\psi}_n\langle\psi_n|\mathbf{x}\rangle\,, \quad \widehat{\psi}^+(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \widehat{\psi}_n^+\langle\mathbf{x}|\psi_n\rangle \tag{56}$$

В начальный момент времени кубит находится в возбужденном состоянии, а бильярд в вакуумном: $|\Psi_0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle_{bill}$.

Бильярдное окружение можно охарактеризовать корреляционной функцией:

$$C(t) = \langle 0|\widehat{A}(t,\mathbf{x})\widehat{A}^+(0,\mathbf{x})|0\rangle = \alpha^2\langle 0|\sum_{k=0}^{n_{max}} \widehat{\psi}_k\langle\psi_k(t)|\mathbf{x}\rangle \sum_{l=0}^{n_{max}} \widehat{\psi}_l^+\langle\mathbf{x}|\psi_l|0\rangle =$$

$$= \alpha^2 \sum_{k=0}^{n_{max}} e^{-iE_kt}|\langle\mathbf{x}|\psi_k\rangle|^2 \tag{57}$$

Спектральная плотность получит следующее выражение:

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{i\omega t}dt = 2\pi\alpha^2 \sum_{k=0}^{n_{max}} \delta(\omega - E_k)|\langle \mathbf{x}|\psi_k\rangle|^2 \tag{58}$$

Простейший из режимов, которые можно исследовать — Марковская динамика. Марковская динамика для обычной системы термостата понятна: существует спектральная плотность, которая плавно меняется на масштабах ширины линии кубита, и Золотое правило Ферми показывает, что спектральная плотность определяет ширину распада: $\Gamma \sim S(\Omega)$.

В бильярде же спектральная плотность дискретна и очень нерегулярная, даже на уровне ширины линии кубита она случайно колеблется. Идея в приминении в данном случае Золотого правила Ферми заключается в том, что если масштаб флуктуаций спектральной плотности гораздо меньше, чем ширина спектальной линии кубита (Лоренцовская), то кубит не чувствует отдельные флуктуации спектральной плотности, он их усредняет. Таким образом можно записать самосогласованное уравнение:

$$\begin{cases} \gamma_{1\to 0} = \int d\omega \dfrac{\Gamma/2}{(\omega-\Omega)^2 + \Gamma^2/4}\dfrac{1}{\pi}S(\omega) \\ \gamma_{1\to 0} = \Gamma \end{cases} \tag{59}$$

где Γ — ширина спектральной линии кубита, $\gamma_{1\to 0}$ — ширина распада кубита.

Предположение было проверено для регулярного кругового бильярда. На Рис. 12 изображена динамика затухания кубита в потенциале бильярда с течением времени. Видно, что начальный участок хорошо аппроксимируется приближением самосогласованной ширины спектральной линии. Далее возникает участок со всплесками от возвращающегося рассеянного поля, их роль в описании диссипации кубита дальнейшим этап, выходящий за рамки этой работы.

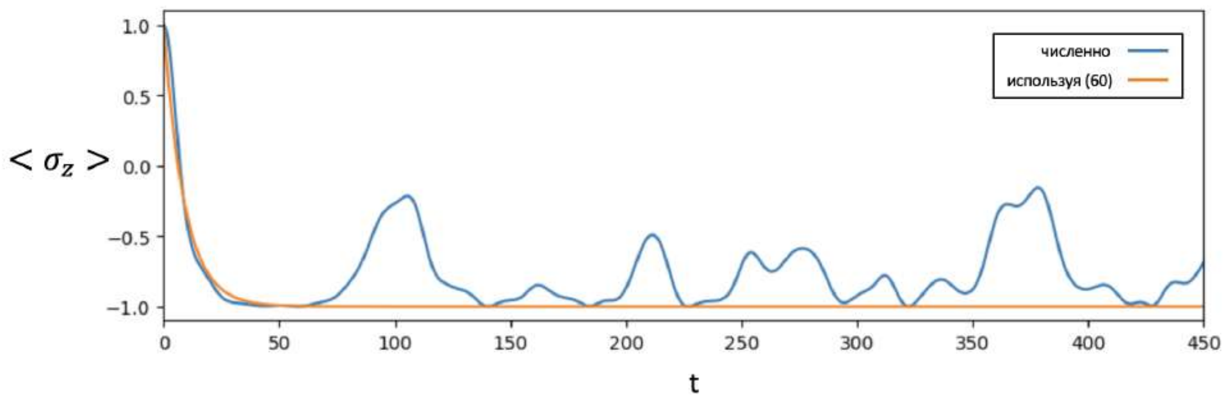

Рис. 12: Динамика затухания кубита в течение времени в потенциале кругового бильярда, $\langle \sigma_z(t) \rangle$. Синяя кривая — численное решение уравнения Шредингера, оранжевая кривая получена численным решением уравнения (59): $2e^{-\Gamma t}-1$. Используемые значения параметров: r=50 (радиус кругового бильярда), $\Omega = E_{max}/2$, 414 уровней энергии бильярда, $E_0 = 0.00224$, $E_{max} = 0.7980$, $\alpha = 0.01$.

5 Заключение

В работе рассмотрены две смежные задачи. Для первой задачи проведен анализ критериев, определяющих квантовый хаос и предложен новый способ его диагностики. Результаты получены с помощью численного решения динамики открытого квантового волчка с толчками на основе аппарата, изложенного в предыдущих главах.

Основная идея заключалась в том, чтобы ввести определение квантового хаоса по аналогии с классическим определением через расхождение близлежащих траекторий.

Квантовые траектории можно ввести благодаря подключению системы к окружению. Квантовое окружение в данном случае является аналогом записывающего устройства. Чтобы некоторые степени свободы окружения сохраняли информацию о том, как себя вела исследуемая ОКС, необходимо, чтобы эта информация не изменялась во времени. Роль носителя информации в квантовом окружении выполняют необратимо отключившиеся от ОКС степени свободы, которые до этого значимо взаимодействовали с ней, для них перестает меняться статистика (вероятность быть в данном состоянии). Причем эти степени свободы периодически возникают с течением эволюции системы во времени.

Таким образом, можно рассматривать окружения, как измерительный прибор, который автономно выбирает момент времени измерения и предпочтительный базис без вмешательства человека-экспериментатора. И по очереди в течение эволюции в реальном времени, измеряя одну за другой необратимо отключающиеся моды с определенной вероятностью получается последовательность результатов измерения, которые складываются в квантовую траекторию.

Подтвердилось, что для регулярного движения декогерентные истории ведут себя относительно регулярно, а для хаотического движения, записанная траектория частицы более флуктуирующая и нерегулярная. Энтропия ансамбля таких траекторий (декогерентных историй) для хаотического случая растет быстрее, чем для интегрируемого. Также можно наблюдать заметный резкий рост энтропии при переходе динамики системы от интегрируемой к хаотической на значениях силы толчка K от 2 до 3 (Рис. 10). Таким образом, данный подход позволил зафиксировать явление квантового хаоса для модели квантового волчка с толчками.

Вторая задача заключалась в рассмотрении хаотической системы, а именно бильярдной системы, как окружения конечного объема. В рамках работы был написан пакет программ на Phyton для расчета собственных функций и собственных энергий таких систем, а также исследован простейший, Марковский режим диссипации кубита, помещенного в такое окружение.

В заключение хочется отметить, что за рамками данной работы необходимо провести дальнейший анализ нового критерия хаоса с помощью энтропии ансамбля квантовых траекторий и проверить его на других хаотических системах. Также представляется важным продолжить исследование с помощью предложенного аппарата поведения системы в хаотическом окружении конечного объема.

Список литературы

[1] Marko Robnik, "Topics in quantum chaos of generic systems" , Nonlinear Phenomena in Complex Systems (Minsk), Vol. 1 (1998), 1, arXiv:nlin/0003058

[2] Crt Lozej, "Transport and Localization in Classical and Quantum Billiards" , SLAC-R-569 UC-414

[3] Arnd Bäcker, "Quantum chaos in billiards" , Computing in Science & Engineering, Vol 9, Issue 3, (2007)

[4] Nikolai Chernov, Roberto Markarian, "Chaotic billiards", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 127, (2006)

[5] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, "Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws", Phys. Rev. Lett. 52, 1 (1984)

[6] F. Haake, "Quantum Signatures of Chaos", Springer, Berlin, (2010)

[7] Luca D'Alessio, Yariv Kafri, Anatoli Polkovnikov, Marcos Rigol, "From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics", Adv. Phys. 65, 239 (2016), arXiv:1509.06411

[8] Nikita Kolganov, Dmitrii A. Trunin, "Classical and quantum butterfly effect in nonlinear vector mechanics", Phys. Rev. D 106, 025003 (2022), arXiv:2205.05663.

[9] B. Y. Chirikov, "Quantum Chaos and Ergodic Theory", Springer Series in Nonlinear Dynamics, (1995).

[10] Alex W. Chin, Ángel Rivas, Susana F. Huelga, Martin B. Plenio, "Exact mapping between system-reservoir quantum models and semi-infinite discrete chains using orthogonal polynomials", J. Math. Phys. 51, 092109 (2010), arXiv:1006.4507.

[11] E. A. Polyakov, ”Beyond The Fermi’s Golden Rule: Discrete-Time Decoherence Of Quantum Mesoscopic Devices Due To Ban- dlimited Quantum Noise.” arXiv preprint arXiv:2206.02952 (2022).

[12] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, ”On Devaney’s definition of chaos”, The American Mathematical Monthly, 99 (4), (1992).

[13] Joseph Emerson, Yaakov S. Weinstein, Seth Lloyd, D.G. Cory, ”Fidelity Decay as an Efficient Indicator of Quantum Chaos”, Phys. Rev. Lett. 89, 284102 (2002), arXiv:quant-ph/0207099.

[14] Ph. Jacquod, C. Petitjean, ”Decoherence, Entanglement and Irreversibility in Quantum Dynamical Systems with Few Degrees of Freedom”, Advances in Physics 58, vol. 2, 67 (2009), arXiv:0806.0987.

[15] Efim B. Rozenbaum, Sriram Ganeshan, Victor Galitski, ”Lyapunov Exponent and Out-of-Time-Ordered Correlator’s Growth Rate in a Chaotic System”, Phys. Rev. Lett. 118, 086801 (2017), arXiv:1609.01707.

[16] Shenglong Xu, Brian Swingle, ”Scrambling Dynamics and Out-of-Time Ordered Correlators in Quantum Many-Body Systems: a Tutorialar”, arXiv:2202.07060.

[17] Koji Hashimoto, Keiju Murata, Ryosuke Yoshii, ”Out-of-time-order correlators in quantum mechanics”, Journal of High Energy Physics volume 2017, 138 (2017), arXiv:1703.09435.

[18] Qian Wang, Marko Robnik, ”Statistics of phase space localization measures and quantum chaos in the kicked top model”, arXiv:2303.05216v1.

[19] M. Srednicki, “Chaos and quantum thermalization”, Phys. Rev. E 50, 888 (1994), cond-mat/9403051.

[20] Petr Braun, Daniel Waltner, Maram Akila, Boris Gutkin, Thomas Guhr, “Transition from Quantum Chaos to Localization in Spin Chains“, Phys. Rev. E 101, 052201 (2020), arXiv:1902.06265.

[21] M. Berry, "Chaos and the semiclassical limit of quantum mechanics (is the moon there when somebody looks?)", Quantum Mechanics: scientific perspectives on Divine Action eds: R. J. Russell, P. Clayton, K. Wegter-McNelly and J. Polkinghorne (Vatican Observatory CTNS publications 2001).

[22] M. A. Marchiori and M. A. M. de Aguiar, "Energy dissipation via coupling with a finite chaotic environment", Phys. Rev. E 83, 061112 (2011).

[23] J. C. Xavier, W. T. Strunz, M. W. Beims, "Dissipative dynamics in a finite chaotic environment: Relationship between damping rate and Lyapunov exponent", Phys. Rev. E 92, 022908 (2015).

[24] Zhao Wen-Lei, Jie Quan-Lin, Zhou Bo, "Quantum to Classical Transition by a Classically Small Interaction", Commun. Theor. Phys. 54 247 (2010).

[25] Nicolás Mirkin and Diego Wisniacki, "Quantum chaos, equilibration, and control in extremely short spin chains", Phys. Rev. E 103, L020201 (2021).

[26] Robin Blume-Kohout and Wojciech H. Zurek, "Decoherence from a chaotic environment: An upside-down "oscillator" as a model", Phys. Rev. A 68, 032104 (2003).

[27] Aviva Gubin, Lea F. Santos, "Quantum chaos: an introduction via chains of interacting spins-1/2", Am. J. Phys. 80, 246 (2012), arXiv:1106.5557.

[28] F. Haake, M. Kuś, R. Scharf, "Classical and quantum chaos for a kicked top", Zeitschrift für Physik B Condensed Matter 65, 381 (1987).

[29] E. B. Bogomolny, B. Georgeot, M.-J. Giannoni, C. Schmit, "Chaotic billiards generated by arithmetic groups", Phys. Rev. Lett. 69, 1477 (1992).

[30] J.J.Halliwell, "A Review of the Decoherent Histories Approach to Quantum Mechanics", Annals N.Y.Acad.Sci.755:726-740 (1995), arXiv:gr-qc/9407040.

[31] R. B. Griffiths, "Consistent Interpretations of Quantum Mechanics Using Quantum Trajectories", Phys.Rev.Lett. 70, 2201 (1993).

[32] Lajos Diósi, "Non-Markovian Open Quantum Systems: Input-Output Fields, Memory, Monitoring", Phys.Rev. A85 (2012) 034101-(5) Phys.Rev.Lett. 70, 2201 (1993), arXiv:1108.3763.

[33] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, "The Theory of Open Quantum Systems", Oxford University Press, (2002).

[34] F.Waldner, D.R. Barberis, H. Yamazaki, "Route to chaos by irregular periods: Simulations of parallel pumping in ferromagnets", Phys. Rev. A 31, 420 (1985).

[35] Elliott H. Lieb, Derek W. Robinson, "The finite group velocity of quantum spin systems", Comm. Math. Phys. 28(3) (1972)

[36] Vedika Khemani, Ashvin Vishwanath, D. A. Huse, "Operator spreading and the emergence of dissipative hydrodynamics under unitary evolution with conservation laws", Phys. Rev. X 8, 031057 (2018), arXiv:1710.09835

A Нахождение прямого светового конуса, распространяющегося с минимальной скоростью

Решая многочастичную задачу на временном интервале $[0, T]$ необходимо изначально оценить прямой световой конус. В интервале времени $[0, T]$ значимые степени свободы удовлетворяют условию: $g_+(\chi, T) > 0$. Для того, чтобы их построить и определить моменты времени их подключения сначала решается одночастичная задача (13) для волновой функции. В силу теоремы Либа - Робинсона [35] уравнение Шрёдингера может быть обрезано на конечное, но при этом большое числе узлов (N). Всего узлов гораздо больше, чем статистически значимых. Для определения статистически значимых узлов используется (22): считается матрица плотности $\rho_+(T)$ (18) (из решения одночастичной задачи на интервале $[0, T]$) и находится наиболее значимая мода:

$$\rho_+(T)|\phi_l\rangle = \pi_l|\phi_l\rangle \tag{60}$$

собственные значения π_l раполагаются в убывающем порядке: $\pi_1 \geq \pi_2 \geq ...\pi_N$ так, что наиболее значимая мода π_1. Статистически значимыми модами будут только те, для которых выполняется (22), то есть $\pi_l/\pi_1 > r_{cut}$. Всего их $m_{in}(T) \ll N$ штук и они запоминаются в памяти: $\phi_1, ..., \phi_{m_{in}(T)}$ (подключающиеся моды).

К моменту времени T: $\phi_1, ..., \phi_{m_{in}(T)}$ (24) содержат статистически значимую информацию о системе. Для растягивания светового конуса можно сделать унитарное преобразование, так что наименее значимая мода подключается самой поздней.

Данное преобразование находится рекуррентно следующим образом:
В силу симметрии уравнений относительно обращения во времени моды, которые медленнее подключаются к ОКС быстрее отключаются от нее. Следовательно, чтобы найти световой конус с минимальной скоростью распростра-

нения, можно вычислять собственные значения $\rho_+(T)$ обратно во времени. В каждый момент времени τ от T до 0 с каким-то дискретным шагом dt.

В момент T — все моды подключены, их $m_{in}(T)$ штук.

В каждый момент времени τ ищется матрица плотности (18) в диагональном базисе. Диагонализация осуществляется с помощью унитарной матрицы U_1 размерности $m_{in}(T) \times m_{in}(T)$, собственные значения, располагаются в убывающем порядке:

$$\rho_+(\tau)|\tilde{\phi}_k(\tau)\rangle = \pi_k(\tau)|\tilde{\phi}_k(\tau)\rangle$$

Как только $\pi_{m_{in}(T)}(\tau)/\pi_1(\tau) < r_{cut}$ условие (23) нарушается, то есть статистический вклад $|\tilde{\phi}_{m_{in}(T)}(\tau)\rangle$ становится пренебрежимо малым и мода отключается. Этот момент времени запоминается $\tau = t^{in}_{m(T)}$ и мода $|\tilde{\phi}_{m(T)}(t^{in}_{m(T)})\rangle$ добавляется в поток входящих мод: $\kappa^{in}_{m(T)} = \tilde{\phi}_{m(T)}(t^{in}_{m(T)})$. Мод, образующих прямой световой конус с минимальной скоростью расространения.

Как только данная мода отключилась из обратного распространения, размерность матрицы плотности уменьшается на 1. Это происходит в каждый момент времени t^{in}_k, когда условие попадания в прямой световой конус нарушается:

$$\pi_k(t^{in}_k)/\pi_1(t^{in}_k) < r_{cut}$$

Рекуррентно повторяя эти шаги, определяются все подключившиеся моды κ^{in}_k (образующие прямой световой конус с минимальной скоростью распространения) и времена их подключения t^{in}_k:

$$\begin{pmatrix} \kappa^{in}_1 \\ \vdots \\ \kappa^{in}_{m_{in}(T)} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \phi^{in}_1 \\ \vdots \\ \phi^{in}_{m_{in}(T)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{in}_{1,0} & \chi^{in}_{1,1} & \cdots \\ \chi^{in}_{2,0} & \chi^{in}_{2,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{in}_1 \\ \vdots \\ \phi^{in}_{m_{in}(T)} \end{pmatrix} \tag{61}$$

где W совершает необходимый поворот, состоящий из матриц, диагонализующих матрицу плотности.

B Нахождение необратимо отключившихся мод

Изначально $\rho_-(t,\phi)$ матрица размерности $m_{in}(t) \times m_{in}(t)$, поскольку она спроецирована на подпространство входящих мод κ_1^{in}, ..., $\kappa_{m_{in}(t)}^{in}$, подключившихся к моменту времени t. В каждый момент времени от $t = 0$ до $t = T$ (с каким-то шагом dt) можно посчитать ее собственные значения (диагонализация с помощью матрицы U_k):

$$\rho_-(t)|\tilde{\phi}_k^-(t)\rangle = \pi_k^-(t)|\tilde{\phi}_k^-(t)\rangle \tag{62}$$

и упорядочить их следующим образом $\pi_1 \geq \pi_1 \geq ... \geq \pi_{m_{in}(t)}$ так, что $\pi_{m_{in}(t)}$ наименее значимая мода.

Когда $\pi_{m_{in}(t)}/\pi_1 < r_{cut}$ (вне обратного светового конуса), мода, соответствующая собственному значению $\pi_{m_{in}(t)}$ необратимо отключится от ОКС.

Данный момент времени запоминается как момент отключения первой моды (удобно обозначить t_1^{out}), а сама мода $\phi^-(t)$ добавляется в поток выходящих мод, необратимо отключившихся от ОКС: $\kappa_1^{out} = \phi_{m_{in}(t)}^-(t_1^{out})$ (индекс $m_{in}(t)$ относится к размерности матрицы плотности).

Как только мода отключается размерность матрицы ρ_- уменьшается на 1 в каждый момент времени t_k^{out}. Она проецируется на подпространство мод $m_{in}(t_k^{out}) - m_{out}(t_k^{out})$, подпространство размерности релевантных мод, то есть тех которые подключились к ОКС, но еще не отключились от нее к моменту времени t_k^{out}.

Рекуррентнно повторяя данную процедуру, можно найти поток выходящих необратимо отключившихся от ОКС мод.

Таким образом выходящие необратимо отключившиеся моды рекуррентно получаются из потока входящих мод унитарными преобразованиями:

$$
\begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{out+} \\ \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{in+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{m_{in}(t_1^{out})}^{in+} \end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_k^{out+} \\ \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{r(t_k^{out})-1}^{rel+} \end{pmatrix} = U_k \begin{pmatrix} \widehat{\kappa}_1^{rel+} \\ \vdots \\ \widehat{\kappa}_{r(t_k^{out})}^{rel+} \end{pmatrix} \tag{63}
$$

где U_1 матрица размерности $m_{in}(t_1^{out}) \times m_{in}(t_1^{out})$ — диагонализует матрицу плотности для поиска первой отключившейся моды κ_1^{out} и так далее, U_k матрица размерности $r(t_k^{out}) \times r(t_k^{out})$ — диагонализует матрицу плотности для поиска отключившейся моды κ_k^{out}.